

Пределы

1. Угадайте пределы и докажите:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n-1}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2+2}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{n^2+n+1}$

2. Вычислите пределы:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+5n+1}{n^2+2n+3}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3+4n^2+19}{9n^3+n+1}$

3. Докажите напрямую, что если $\lim a_n = A$, то $\lim(ca_n) = cA$.

4. Приведите пример, когда $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = \infty$, но $\lim(a_n - b_n) \neq 0$.

5. Приведите пример, когда $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = 0$, но $\lim \frac{a_n}{b_n} \neq 0$.

Производные

6. Вычислите производные по определению:

(a) $3x + 1$

(b) $5x^2 + 10x + 4$

(c) $\sin x$

(d) $\cos x$

7. Докажите теорему деления для производных:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

8. Вычислите производные:

(a) $\operatorname{tg} x$

(b) 2^x

(c) $\log_2 x$

(d) x^x

9. Почему у функции $|x|$ нет производной в точке $x = 0$?

10. Из определения ускорения для равноускоренного движения точки,

$$v = v_0 + at,$$

выведите формулу координаты точки

$$x = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}.$$

Интегрирование

11. Заварочный чайник представляет собой конус с радиусом 10 см и образующей 20 см. Вы хотите наполнить его на половину объема.
- (a) Будете ли Вы правы, если наполните его до половины *высоты чайника*? Почему?
 - (b) С помощью интеграла вычислите, на какую высоту надо будет наполнить чайник, чтобы вода составляла половину объема.
12. Найдите площадь под графиком функции $y = x^5 + x + 1$ на отрезке от 0 до 1.