Множества

Множество — неопределяемое понятие в математике.
Когда-то считали, что множество — это любой «мешок» элементов.

Множества

Множество — неопределяемое понятие в математике. Когда-то считали, что множество — это любой «мешок» элементов. Например,

$$\{1; 3; 7; 9; 12\}$$

Множества

Множество — неопределяемое понятие в математике. Когда-то считали, что множество — это любой «мешок» элементов. Например,

$$\{1; 3; 7; 9; 12\}$$

$$\{x \in \mathbb{N} \colon 2|x \wedge 3|x\} = \{6; 12; 18; 24; 30; \ldots\}$$

Множества

Множество — неопределяемое понятие в математике. Когда-то считали, что множество — это любой «мешок» элементов. Например,

$$\{1; 3; 7; 9; 12\}$$

$$\{x \in \mathbb{N} : 2|x \wedge 3|x\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\} = (0; 1)$$

$$\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ простое}\} = \{2; 3; 5; 7; 11; \ldots\}$$

Множества

Множество — неопределяемое понятие в математике. Когда-то считали, что множество — это любой «мешок» элементов. Например,

$$\{1; 3; 7; 9; 12\}$$

$$\{x \in \mathbb{N} \colon 2|x \wedge 3|x\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \colon 0 < x < 1\}$$

$$\{x \in \mathbb{N} \colon x \text{ простое}\}$$

Множества необязательно состоят из чисел. Они могут состоять из других множеств:

Множества

Множество — неопределяемое понятие в математике. Когда-то считали, что множество — это любой «мешок» элементов. Например,

$$\{1; 3; 7; 9; 12\}$$

$$\{x \in \mathbb{N} : 2|x \wedge 3|x\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$$

$$\{x \in \mathbb{N} : x \text{ простое}\}$$

Множества необязательно состоят из чисел. Они могут состоять из других множеств:

$\{2\}$

$\{4; 8; 10\}$

$$\{A \subset \mathbb{N} : \forall x \in A\ 2|x\},$$

$\{4; 8; 12; 16; 20; \ldots\}$ $\{2; 4; 6; 8; 10; \ldots\}$

Множества

Множество — неопределяемое понятие в математике. Когда-то считали, что множество — это любой «мешок» элементов. Например,

$$\{1; 3; 7; 9; 12\}$$

$$\{x \in \mathbb{N} \colon 2|x \wedge 3|x\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \colon 0 < x < 1\}$$

$$\{x \in \mathbb{N} \colon x \text{ простое}\}$$

Множества необязательно состоят из чисел. Они могут состоять из других множеств:

$$\{A \subset \mathbb{N} \colon \forall x \in A\ 2|x\},$$

множество множеств, состоящих только из четных чисел.

Конструкции из множеств

- **Пустое множество** — множество, не содержащее элементов. Обозначение: $\varnothing$.

$\{\ \}$

Конструкции из множеств

- **Пустое множество** — множество, не содержащее элементов. Обозначение: $\varnothing$.
- **Пересечение множеств**. Если A, B — множества, то их пересечение это множество

$$A \cap B = \{x : \underline{x \in A} \wedge \underline{x \in B}\}$$

$$\{2; 4; 6; 8; 10; \ldots\} \cap \{3; 6; 9; 12; 15; \ldots\} = \{6; 12; 18; \ldots\}$$

Конструкции из множеств

- **Пустое множество** — множество, не содержащее элементов. Обозначение: $\varnothing$.
- **Пересечение множеств**. Если A, B — множества, то их пересечение это множество

$$A \cap B = \{x\colon x \in A \land x \in B\}$$

- **Объединение множеств**. Если A, B — множества, то их пересечение это множество

$$A \cup B = \{x\colon x \in A \lor x \in B\}$$

$\{2;4;6;8\} \cup \{1;2;3;4\} = \{1;2;3;4;6;8\}$

Конструкции из множеств

- **Пустое множество** — множество, не содержащее элементов. Обозначение: $\varnothing$.
- **Пересечение множеств**. Если A, B — множества, то их пересечение это множество

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

- **Объединение множеств**. Если A, B — множества, то их пересечение это множество

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

- **Разность множеств**. Если A, B — множества, то их разность это множество

Конструкции из множеств

- **Пустое множество** — множество, не содержащее элементов. Обозначение: $\varnothing$.
- **Пересечение множеств**. Если A, B — множества, то их пересечение это множество
$$A \cap B = \{x \colon x \in A \wedge x \in B\}$$
- **Объединение множеств**. Если A, B — множества, то их пересечение это множество
$$A \cup B = \{x \colon x \in A \vee x \in B\}$$
- **Разность множеств**. Если A, B — множества, то их разность это множество

$\{1;2;5\} \setminus \{2;5;4\} = \{1\}$
$$A \setminus B = \{x \colon x \in A \wedge x \notin B\}$$
$\mathbb{N} \setminus \mathbb{P} = \{4;6;8;9;10;12;15;\ldots\}$

Нарисовать тут примеры.

- **Множество всех подмножеств.** Если A — множество, то можно определить:

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subset A\}.$$

"power-set"

- **Множество всех подмножеств**. Если A — множество, то можно определить:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \colon X \subset A\}.$$

Например, $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

- **Множество всех подмножеств**. Если A — множество, то можно определить:

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subset A\}.$$

Например, $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) =$
$\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

- **Декартово произведение.** Если A, B — множества, то можно определить:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\},$$

где (x, y) — упорядоченная пара из двух элементов.

- **Множество всех подмножеств.** Если A — множество, то можно определить:

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subset A\}.$$

Например, $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

- **Декартово произведение.** Если A, B — множества, то можно определить:

$$A \times B = \{(x,y) : x \in A, y \in B\},$$

где (x,y) — упорядоченная пара из двух элементов. Например, $\{0,1\} \times \{1,2,3\} = \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,1),(1,2),(1,3)\}$.

Всё есть множество

Всё есть множество

Натуральные числа можно определить… как множества!

Всё есть множество

Натуральные числа можно определить... как множества!

- $0 = \varnothing$

Всё есть множество

Натуральные числа можно определить... как множества!

- $0 = \varnothing$ $\{\}$
- $1 = 0 \cup \{0\} = \{\varnothing\}$ $\{\{\}\}$

Всё есть множество

Натуральные числа можно определить... как множества!

- $0 = \varnothing$
- $1 = 0 \cup \{0\} = \{\varnothing\}$
- $2 = 1 \cup \{1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

Всё есть множество

Натуральные числа можно определить... как множества!

- $0 = \varnothing$
- $1 = 0 \cup \{0\} = \{\varnothing\}$
- $2 = 1 \cup \{1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $3 = 2 \cup \{2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}$

Всё есть множество

Натуральные числа можно определить... как множества!

- $0 = \varnothing$
- $1 = 0 \cup \{0\} = \{\varnothing\}$
- $2 = 1 \cup \{1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $3 = 2 \cup \{2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$
- $\ldots$

Функции

Пусть есть два множества A и B. **Функцией** из A в B называется любое *правило*, которое каждому элементу $x \in A$ однозначно сопоставляет $y \in B$.

11

$$y = \ln(2x+4) + 6x + 11$$

$$x \longmapsto y$$

$$x \in \mathbb{R} \qquad y \in \mathbb{R}$$

Функции

Пусть есть два множества A и B. **Функцией** из A в B называется любое *правило*, которое каждому элементу $x \in A$ однозначно сопоставляет $y \in B$.

Примеры функций.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.
  Правило: «берется число, вычисляется его синус, и это значение функции».

Функции

Пусть есть два множества A и B. **Функцией** из A в B называется любое *правило*, которое каждому элементу $x \in A$ однозначно сопоставляет $y \in B$.

Примеры функций.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.
  Правило: «берется число, вычисляется его синус, и это значение функции».
- $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(x) = 2 \cdot x$, $x \in \mathbb{N}$
  Правило: «берется число, удваивается, и это значение функции»

Функции

Пусть есть два множества A и B. **Функцией** из A в B называется любое *правило*, которое каждому элементу $x \in A$ однозначно сопоставляет $y \in B$.

Примеры функций.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.
  Правило: «берется число, вычисляется его синус, и это значение функции».

  $0, \pi \xmapsto{\sin} 0$

  не инъекция
  не сюръекция

- $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(x) = 2 \cdot x$, $x \in \mathbb{N}$
  Правило: «берется число, удваивается, и это значение функции»

  $2x = 2y$
  $x = y$

  инъекция,
  не сюръекция

- $h : \{1, 4, 6\} \to \{3, 9\}$, $h(1) = 3$, $h(4) = 9$, $h(6) = 3$.
  Чем не правило? :)

  не инъекция,
  сюръекция

- w : {дождь, снег, солнце} $\to$ {кепка, зонтик, сапоги, пакет},

- $w : \{\text{дождь, снег, солнце}\} \to \{\text{кепка, зонтик, сапоги, пакет}\}$,
- $w(\text{солнце}) = \text{кепка}$, $w(\text{дождь}) = \text{зонтик}$, $w(\text{снег}) = \text{сапоги}$.

- w : {дождь, снег, солнце} $\to$ {кепка, зонтик, сапоги, пакет},
- w(солнце) = кепка, w(дождь) = зонтик, w(снег) = сапоги.
- *type* : база всех адресов в СПб $\to$ типы зданий Например, *type*(1-я Советская, 6) = бизнес-центр.

- w : {дождь, снег, солнце} $\to$ {кепка, зонтик, сапоги, пакет},
- w(солнце) = кепка, w(дождь) = зонтик, w(снег) = сапоги.
- *type* : база всех адресов в СПб $\to$ типы зданий Например, *type*(1-я Советская, 6) = бизнес-центр.
- *scale* : первичные баллы $\to$ вторичные баллы

Примеры не функций:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$.
  Эта функция необязательно выдает натуральные числа. Функцией $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ее назвать можно.

- w : {дождь, снег, солнце} → {кепка, зонтик, сапоги, пакет},
- w(солнце) = кепка, w(дождь) = зонтик, w(снег) = сапоги.
- *type* : база всех адресов в СПб → типы зданий Например, *type*(1-я Советская, 6) = бизнес-центр.
- *scale* : первичные баллы → вторичные баллы

Примеры не функций:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$.
  Эта функция необязательно выдает натуральные числа.
  Функцией $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ее назвать можно.
- *bro* : жители Земли → жители Земли,
  bro(человек) = брат этого человека.

- w : {дождь, снег, солнце} $\to$ {кепка, зонтик, сапоги, пакет},
- w(солнце) = кепка, w(дождь) = зонтик, w(снег) = сапоги.
- *type* : база всех адресов в СПб $\to$ типы зданий Например, *type*(1-я Советская, 6) = бизнес-центр.
- *scale* : первичные баллы $\to$ вторичные баллы

Примеры не функций:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$.
  Эта функция необязательно выдает натуральные числа. Функцией $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ее назвать можно.
- *bro* : жители Земли $\to$ жители Земли, *bro*(человек) = брат этого человека. У человека может быть несколько братьев, сопоставление неоднозначное.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.

- w : {дождь, снег, солнце} $\to$ {кепка, зонтик, сапоги, пакет},
- w(солнце) $=$ кепка, w(дождь) $=$ зонтик, w(снег) $=$ сапоги.
- *type* : база всех адресов в СПб $\to$ типы зданий Например, *type*(1-я Советская, 6) $=$ бизнес-центр.
- *scale* : первичные баллы $\to$ вторичные баллы

Примеры не функций:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$.
  Эта функция необязательно выдает натуральные числа. Функцией $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ее назвать можно.
- *bro* : жители Земли $\to$ жители Земли, *bro*(человек) $=$ брат этого человека. У человека может быть несколько братьев, сопоставление неоднозначное.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Функция не определена при $x < 0$. Правило некорректное. Но можно сделать функцией $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$.

Типы функций

- **Инъекция:** разным элементам сопоставляются разные элементы.

Типы функций

- **Инъекция:** разным элементам сопоставляются разные элементы.

$$\forall a_1, a_2 \in A\ (a_1 \neq a_2 \longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2))$$

Типы функций

- **Инъекция:** разным элементам сопоставляются разные элементы.

$$\forall a_1, a_2 \in A\, (a_1 \neq a_2 \longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2))$$

- **Сюръекция:** каждый элемент B является образом хотя бы одного элемента A:

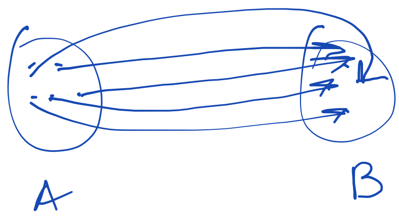
Типы функций

- **Инъекция:** разным элементам сопоставляются разные элементы.

$$\forall a_1, a_2 \in A \ (a_1 \neq a_2 \longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2))$$

- **Сюръекция:** каждый элемент B является образом хотя бы одного элемента A:

$$\forall y \in B \ \exists x \in A \ f(x) = y$$



Типы функций

- **Инъекция:** разным элементам сопоставляются разные элементы.

$$\forall a_1, a_2 \in A\ (a_1 \neq a_2 \longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2))$$

- **Сюръекция:** каждый элемент B является образом хотя бы одного элемента A:

$$\forall y \in B\ \exists x \in A\ f(x) = y$$

- **Биекция:** инъекция + сюръекция.

Типы функций

- **Инъекция:** разным элементам сопоставляются разные элементы.

$$\forall a_1, a_2 \in A\ (a_1 \neq a_2 \longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2))$$

- **Сюръекция:** каждый элемент B является образом хотя бы одного элемента A:

$$\forall y \in B\ \exists x \in A\ f(x) = y$$

- **Биекция:** инъекция + сюръекция.

Мощность множеств

Как понять, что одно множество *больше* другого?

Мощность множеств

Как понять, что одно множество *больше* другого?

В случае с конечными множествами, кажется, все понятно: меньше то множество, у которого меньше элементов.

Мощность множеств

Как понять, что одно множество *больше* другого?

В случае с конечными множествами, кажется, все понятно: меньше то множество, у которого меньше элементов.

Поймем этот дурацкий факт на другом языке: пусть, например,

$$A = \{a, b, c\}, \quad B = \{d, e, g, h\}.$$

Мощность множеств

Как понять, что одно множество *больше* другого?

В случае с конечными множествами, кажется, все понятно: меньше то множество, у которого меньше элементов.

Поймем этот дурацкий факт на другом языке: пусть, например,

$$A = \{a, b, c\}, \quad B = \{d, e, g, h\}.$$

Тогда мы можем построить **инъекцию** $f : A \to B$,

$$f(a) = d, \; f(b) = h, \; f(c) = g.$$

Мощность множеств

Как понять, что одно множество *больше* другого?

В случае с конечными множествами, кажется, все понятно: меньше то множество, у которого меньше элементов.

Поймем этот дурацкий факт на другом языке: пусть, например,

$$A = \{a, b, c\}, \quad B = \{d, e, g, h\}.$$

$A \xrightarrow{\text{инъ}} B$

$|A| \leqslant |B|$

Тогда мы можем построить **инъекцию** $f : A \to B$,

$$f(a) = d, \; f(b) = h, \; f(c) = g.$$

То, что мы смогли построить инъекцию, означает, что B по крайней мере не меньше A. Если бы B было меньше A, то мы бы не смогли: какие-нибудь два элемента точно бы «склеились».

Сравнение бесконечных множеств

В случае с бесконечными множествами сравнение идет на том же языке **инъекций**, **сюръекций** и **биекций**.

Сравнение бесконечных множеств

В случае с бесконечными множествами сравнение идет на том же языке **инъекций**, **сюръекций** и **биекций**.

Определение.

- Говорим, что **множество** A **не больше множества** B (и пишем $|A| \leq |B|$, или $A \hookrightarrow B$), если существует *инъекция* $A \to B$.

Сравнение бесконечных множеств

В случае с бесконечными множествами сравнение идет на том же языке **инъекций**, **сюръекций** и **биекций**.

Определение.

- Говорим, что **множество** A **не больше множества** B (и пишем $|A| \leq |B|$, или $A \hookrightarrow B$), если существует *инъекция* $A \to B$.
- Говорим, что **множество** A **не меньше множества** B (и пишем $\underline{|A| \geq |B|}$, или $\underline{A \twoheadrightarrow B}$), если существует ~~*инъекция*~~ $A \to B$.
  сюръекция

Сравнение бесконечных множеств

В случае с бесконечными множествами сравнение идет на том же языке **инъекций**, **сюръекций** и **биекций**.

Определение.

- Говорим, что **множество** A **не больше множества** B (и пишем $|A| \leq |B|$, или $A \hookrightarrow B$), если существует *инъекция* $A \to B$.
- Говорим, что **множество** A **не меньше множества** B (и пишем $|A| \geq |B|$, или $A \twoheadrightarrow B$), если существует ~~*инъекция*~~ $A \to B$.
- Говорим, что **множество** A **равномощно множеству** B (и пишем $|A| = |B|$, или $A \sim B$), если существует *биекция* $A \to B$.

Натуральные числа vs целые числа

Каких чисел больше — натуральных или целых?

$$\mathbb{N} \qquad \mathbb{Z} \qquad |\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$$

$$1 \longmapsto 1$$
$$2 \longmapsto 2$$
$$3 \longmapsto 3$$
$$\vdots$$

Натуральные числа vs целые числа

Каких чисел больше — натуральных или целых?

На самом деле их одинаковое количество ($\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$). Попробуйте построить биекцию.

1	2	3	4	5	6	7	8	...
0	1	−1	2	−2	3	−3	4	−4

Натуральные числа vs целые числа

Каких чисел больше — натуральных или целых?

На самом деле их одинаковое количество ($\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$). Попробуйте построить биекцию.

$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7	...
$\mathbb{Z}$	0	1	-1	2	-2	3	-3	...

Натуральные числа vs рациональные числа

А что насчет рациональных? $\mathbb{Q} = \{m/n\colon\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$

Натуральные числа vs рациональные числа

А что насчет рациональных? $\mathbb{Q} = \{m/n \colon m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$

$m \backslash n$	1	2	3	4	5	…
1	1/1 1	1/2 2	1/3 4	1/4 7	1/5	…
2	2/1 3	2/2 5	2/3 8	2/4	2/5	…
3	3/1 6	3/2 9	3/3	3/4	3/5	…
4	4/1 10	4/2	4/3	4/4	4/5	…
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

$$1 \mapsto \frac{1}{1} = 1$$

$$5 \mapsto \frac{2}{2} = 1$$

Натуральные числа vs рациональные числа

А что насчет рациональных? $\mathbb{Q} = \{m/n \colon m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$

$m \backslash n$	1	2	3	4	5	...
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	...
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	...
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	...
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	...
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Пронумеруем все элементы по диагоналям. Эта нумерация и будет **сюръективным** сопоставлением натуральных чисел к рациональным числам. Поэтому $|\mathbb{N}| \geq |\mathbb{Q}|$.

Натуральные числа vs рациональные числа

А что насчет рациональных? $\mathbb{Q} = \{m/n\colon\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$

$m \backslash n$	1	2	3	4	5	...
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	...
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	...
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	...
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	...
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Пронумеруем все элементы по диагоналям. Эта нумерация и будет **сюръективным** сопоставлением натуральных чисел к рациональным числам. Поэтому $|\mathbb{N}| \geq |\mathbb{Q}|$.

Это **не биекция**. Почему? Некоторым натуральным числам будет сопоставляться одно и то же число $(1/2 = 3/6)$.

Натуральные числа vs рациональные числа

А что насчет рациональных? $\mathbb{Q} = \{m/n \colon m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$

$m \backslash n$	1	2	3	4	5	...
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	...
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	...
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	...
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	...
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Пронумеруем все элементы по диагоналям. Эта нумерация и будет **сюръективным** сопоставлением натуральных чисел к рациональным числам. Поэтому $|\mathbb{N}| \geq |\mathbb{Q}|$.

Это **не биекция**. Почему? Некоторым натуральным числам будет сопоставляться одно и то же число $(1/2 = 3/6)$.

А почему $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$? (Постройте очевидную инъекцию.)

Натуральные числа vs вещественные числа

Определение. Множество называется **счётным**, если оно равномощно $\mathbb{N}$.

Натуральные числа vs вещественные числа

Определение. Множество называется **счётным**, если оно равномощно $\mathbb{N}$.

То есть, счётное — такое, которое можно *пронумеровать*.

Натуральные числа vs вещественные числа

Определение. Множество называется **счётным**, если оно равномощно $\mathbb{N}$.

То есть, счётное — такое, которое можно *пронумеровать*.

Можно ли пронумеровать **вещественные числа**?

Натуральные числа vs вещественные числа

Определение. Множество называется **счётным**, если оно равномощно $\mathbb{N}$.

То есть, счётное — такое, которое можно *пронумеровать*.

Можно ли пронумеровать **вещественные числа**?

Теорема (Кантора)

Множество вещественных чисел — не счётно.
(То есть, не существует биекции $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.)

Натуральные числа vs вещественные числа

Определение. Множество называется **счётным**, если оно равномощно $\mathbb{N}$.

То есть, счётное — такое, которое можно *пронумеровать*.

Можно ли пронумеровать **вещественные числа**?

Теорема (Кантора)

Множество вещественных чисел — не счётно.
(То есть, не существует биекции $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.)

Почему???

Для нас (школьников) вещественные числа — последовательности десятичных цифр, и еще там где-то может быть запятая.

$$392.53 \quad 471 \quad 0.333333333\ldots \quad \pi = 3.14159265\ldots$$

Для нас (школьников) вещественные числа — последовательности десятичных цифр, и еще там где-то может быть запятая.

$$392.53 \quad 471 \quad 0.333333333\ldots \quad \pi = 3.14159265\ldots$$

Давайте считать, что запятая всегда есть, и что если после нее конечное число цифр, то мы приписываем бесконечное количество нулей:

$$392.530000\ldots \quad 471.0000\ldots \quad 0.333333333\ldots \quad \pi = 3.14159265\ldots$$

Для нас (школьников) вещественные числа — последовательности десятичных цифр, и еще там где-то может быть запятая.

$$392.53 \quad 471 \quad 0.333333333\ldots \quad \pi = 3.14159265\ldots$$

Давайте считать, что запятая всегда есть, и что если после нее конечное число цифр, то мы приписываем бесконечное количество нулей:

$$392.530000\ldots \quad 471.0000\ldots \quad 0.333333333\ldots \quad \pi = 3.14159265\ldots$$

То есть у нас всегда бесконечные последовательности цифр с запятой где-то.

Итак, предположим, что мы смогли пронумеровать вещественные числа:

$$
\begin{array}{c|r}
1 & 392.530000000000000\ldots \\
2 & 471.000000000000000\ldots \\
3 & 0.333333333333333\ldots \\
4 & 3.141592653589793\ldots \\
5 & 12.232323232323232\ldots \\
6 & 9.123456789012345\ldots \\
7 & 95.000000000000000\ldots \\
8 & 70.185100020020020\ldots \\
9 & 112.300096419641964\ldots \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

Разделим целую и дробную части, и посмотрим на диагональные цифры:

1	392	.	**5**30000000000000...
2	471	.	0**0**000000000000000...
3	0	.	33**3**33333333333333...
4	3	.	141**5**9265358979 32...
5	12	.	2323**2**3232323232323...
6	9	.	12345**6**7890123456...
7	95	.	000000**0**000000000...
8	70	.	1851000**2**00200200...
9	112	.	30009641**9**6419641...
$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$

Разделим целую и дробную части, и посмотрим на диагональные цифры:

$$
\begin{array}{r|rcl}
1 & 392 & . & \mathbf{5}30000000000000\ldots \\
2 & 471 & . & 0\mathbf{0}0000000000000\ldots \\
3 & 0 & . & 33\mathbf{3}33333333333\ldots \\
4 & 3 & . & 141\mathbf{5}9265358979 32\ldots \\
5 & 12 & . & 2323\mathbf{2}323232323\ldots \\
6 & 9 & . & 12345\mathbf{6}7890123456\ldots \\
7 & 95 & . & 000000\mathbf{0}0000000\ldots \\
8 & 70 & . & 1851000\mathbf{2}00200200\ldots \\
9 & 112 & . & 30009641\mathbf{9}6419641\ldots \\
\vdots & \vdots & & \ddots
\end{array}
$$

Получили последовательность цифр:

$$\mathbf{503526029}\ldots$$

Построим из нее вещественное число: добавим «0.», а каждую цифру заменим на следующую:

$$\mathbf{503526029}\ldots \longrightarrow Y = 0.614637130\ldots$$

Что мы можем сказать про Y?

Построим из нее вещественное число: добавим «0.», а каждую цифру заменим на следующую:

$$\mathbf{503526029}\ldots \longrightarrow Y = 0.614637130\ldots$$

Что мы можем сказать про Y?

С одной стороны, это вещественное число, значит оно имеет номер в нашей нумерации.

Построим из нее вещественное число: добавим «0.», а каждую цифру заменим на следующую:

$$\mathbf{503526029}\ldots \longrightarrow Y = 0.614637130\ldots$$

Что мы можем сказать про Y?

С одной стороны, это вещественное число, значит оно имеет номер в нашей нумерации.

С другой стороны, мы построили его так, что оно **отличается от любого числа в нашей нумерации хотя бы в одной позиции.**

Построим из нее вещественное число: добавим «0.», а каждую цифру заменим на следующую:

$$\mathbf{503526029}\ldots \longrightarrow Y = 0.614637130\ldots$$

Что мы можем сказать про Y?

С одной стороны, это вещественное число, значит оно имеет номер в нашей нумерации.

С другой стороны, мы построили его так, что оно **отличается от любого числа в нашей нумерации хотя бы в одной позиции**.

Действительно, если взять число из нашей нумерации с номером k, то Y будет отличаться от него в k-той цифре после запятой.

Построим из нее вещественное число: добавим «0.», а каждую цифру заменим на следующую:

$$\mathbf{503526029}\ldots \longrightarrow Y = 0.614637130\ldots$$

Что мы можем сказать про Y?

С одной стороны, это вещественное число, значит оно имеет номер в нашей нумерации.

С другой стороны, мы построили его так, что оно **отличается от любого числа в нашей нумерации хотя бы в одной позиции**.

Действительно, если взять число из нашей нумерации с номером k, то Y будет отличаться от него в k-той цифре после запятой.

Значит Y не может иметь номера. Противоречие. $\square$

Еще раз кратко: мы предположили, что все вещественные числа можно пронумеровать, и пришли к противоречию.

Еще раз кратко: мы предположили, что все вещественные числа можно пронумеровать, и пришли к противоречию.

То есть, вещественные числа пронумеровать нельзя.

Еще раз кратко: мы предположили, что все вещественные числа можно пронумеровать, и пришли к противоречию.

То есть, вещественные числа пронумеровать нельзя.

Это показывает, что $\mathbb{R}$ более мощно, чем $\mathbb{N}$. $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$.

Вещественных чисел действительно строго больше, чем натуральных :)

Информация (без подробностей и не для изучения)

Подобным «диагональным аргументом» можно доказать, что для любого бесконечного множества A множество $\mathcal{P}(A)$ будет строго мощнее, чем A.

Информация (без подробностей и не для изучения)

Подобным «диагональным аргументом» можно доказать, что для любого бесконечного множества A множество $\mathcal{P}(A)$ будет строго мощнее, чем A. Получается «иерархия бесконечностей»:

$$\begin{array}{c|c}
\aleph_0 & \mathbb{N} \\
\aleph_1 & \mathcal{P}(\mathbb{N});\ \text{или } \mathbb{R} \\
\aleph_2 & \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \\
\aleph_3 & \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))) \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Информация (без подробностей и не для изучения)

Подобным «диагональным аргументом» можно доказать, что для любого бесконечного множества A множество $\mathcal{P}(A)$ будет строго мощнее, чем A. Получается «иерархия бесконечностей»:

$$\begin{array}{c|c} \aleph_0 & \mathbb{N} \\ \aleph_1 & \mathcal{P}(\mathbb{N});\ \text{или } \mathbb{R} \\ \aleph_2 & \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \\ \aleph_3 & \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))) \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

А можно ли построить множество мощности строго между «алефами»?

Теорема (Континуум-гипотеза)

Не существует множеств с мощностью строго между $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ *и* $\aleph_1 = |\mathbb{R}|$.

Проблема была поставлена в 1900 году. Многие пытались ее решить.

Теорема (Континуум-гипотеза)

Не существует множеств с мощностью строго между $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ и $\aleph_1 = |\mathbb{R}|$.

Проблема была поставлена в 1900 году. Многие пытались ее решить.

Теорема (Гёдель, 1940)

Отрицание континуум-гипотезы ***недоказуемо****.*

Теорема (Континуум-гипотеза)

Не существует множеств с мощностью строго между $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ *и* $\aleph_1 = |\mathbb{R}|$.

Проблема была поставлена в 1900 году. Многие пытались ее решить.

Теорема (Гёдель, 1940)

Отрицание континуум-гипотезы ***недоказуемо****.*

Теорема (Коэн, 1963)

Континуум-гипотеза ***недоказуема****.*

Теорема (Континуум-гипотеза)

Не существует множеств с мощностью строго между $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ и $\aleph_1 = |\mathbb{R}|$.

Проблема была поставлена в 1900 году. Многие пытались ее решить.

Теорема (Гёдель, 1940)

*Отрицание континуум-гипотезы **недоказуемо**.*

Теорема (Коэн, 1963)

*Континуум-гипотеза **недоказуема**.*

Как такое возможно?

В каком-то смысле континуум-гипотеза — это задача с неполным условием. «Исходных данных» не хватает, и в зависимости от добавления условий гипотезу можно как доказать, так и опровергнуть.

В каком-то смысле континуум-гипотеза — это задача с неполным условием. «Исходных данных» не хватает, и в зависимости от добавления условий гипотезу можно как доказать, так и опровергнуть.

Роль «исходных данных» здесь играют аксиомы теории множеств Цермело-Френкеля, о которых мы ранее тактично умолчали.